Модуль 1 – «Основы радиотехники»

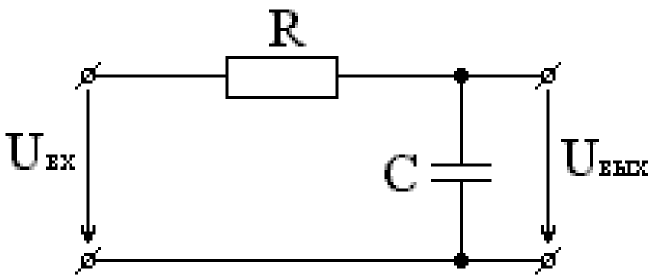
Практическая № 1.

Тема – «Частотные и временные характеристики линейных цепей»

Цель работы: Исследовать и рассчитать частотные и временные характеристики интегрирующей цепи при других значениях параметров R и C.

Задание:

Исследовать и рассчитать частотные и временные характеристики интегрирующей цепи при других значениях параметров R и C.



Необходимо:

а)составить дифференциальное уравнение интегрирующей цепи;

б) найти переходный процесс при одноступенчатом воздействии по входу $U_{вх}=1В$ и значениях $R=100$ *кОм;* $C=10$ *мкФ*, представить график.

Теоретические сведения:

Общие сведения о линейных цепях

Устройства, осуществляющие формирование и преобразование сигналов в составе информационных систем связи и обработки, весьма разнообразны по принципам структурной и функциональной организации, внешним характеристикам. Значительная часть этих устройств адекватны линейным моделям, которые в радиотехнике получили название *линейные цепи.*

Линейные радиотехнические цепи – это цепи, у которых существует линейная зависимость между входными и выходными сигналами. Такие цепи содержат только линейные элементы (пассивные и активные) с параметрами, не зависящими от приложенного к ним напряжения и протекающего через них тока.

Различают линейные цепи с постоянными параметрами и линейные цепи с переменными, изменяющимися во времени параметрами (параметрические цепи). Ниже рассматриваются только линейные цепи с постоянными параметрами, которые будем называть просто линейные цепи.

Функционирование линейных цепей описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Для линейных цепей справедлив *принцип суперпозиции*: реакция цепи на сумму входных сигналов равна сумме реакций на каждый сигнал в отдельности. С позиций спектрального анализа выходной сигнал линейной цепи можно рассматривать как результат суперпозиции его спектральных составляющих, которые, в свою очередь, являются реакцией цепи на соответствующие спектральные составляющие входного сигнала. Математически это записывается так:

$$T[\sum_i x_i(t)] = \sum_i T[x_i(t)]\,; \quad T[cx_i(t)] = cT[x_i(t)]\,,$$

где T – функционал преобразования цепи.

Важным свойством линейных цепей является также тот факт, что линейные цепи не обогащают спектр входного сигнала. Это означает, что в спектре выходного сигнала не появляются составляющие, которые отсутствуют в спектре входного сигнала. Следовательно, общее количество спектральных составляющих в спектре выходного сигнала не может быть больше, чем количество спектральных составляющих в спектре входного сигнала.

Следствием этих свойств является то, что гармонический сигнал, проходя через линейную цепь, остается неизменным по форме. Измениться могут только его амплитуда и начальная фаза.

По характеру временной зависимости выходного сигнала от входного различают безынерционные и инерционные радиотехнические цепи.

Характеристики в частотной области

Спектральное представление сигналов делает весьма удобным их анализ в частотной области. При этом возможно решение задачи о прохождении различных сигналов через линейные цепи, основанное на важном свойстве линейных цепей – справедливости принципа суперпозиции. Необходим только способ определения реакций на выходе цепи, возникающих под воздействием каждой спектральной составляющей. Выходной сигнал при этом можно получить в результате суммирования этих реакций. Такой способ расчета сигналов на выходе линейных цепей основан на использовании их частотных характеристик.

Характеристикой цепи в частотной области является ее передаточная функция, которая определяется в стационарном режиме как отношение комплексной амплитуды гармонического сигнала (напряжения или тока) на выходе цепи к комплексной амплитуде гармонического сигнала на ее входе. В зависимости от характера сигналов на входе и выходе цепи передаточная функция может иметь свойства:

коэффициента передачи по напряжению $K(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}$;

сопротивления $Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_{вых}}{\dot{I}_{вх}}$;

коэффициента передачи по току $K_I(j\omega)=\dfrac{\dot{I}_{вых}}{\dot{I}_{вх}}$;

проводимости $Y(j\omega)=\dfrac{\dot{I}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}$.

Наиболее часто используют первые две характеристики.

Коэффициент передачи по напряжению $K(j\omega)$ будем называть в дальнейшем *частотным коэффициентом передачи*, или просто частотной характеристикой. Однако надо иметь в виду, что в литературе эту частотную характеристику часто называют: передаточной функцией [1,3], комплексным коэффициентом передачи [6], комплексной передаточной функцией [9], комплексным коэффициентом усиления [7,12].

Передаточную функцию $Z(j\omega)$ будем называть *комплексным сопротивлением*.

Частотный коэффициент передачи как комплексное число можно выразить в показательной форме через модуль и аргумент, т.е.

$$K(j\omega)=\frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}=K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},\quad K(\omega)=\frac{U_{вых}}{U_{вх}},\quad \varphi(\omega)=\varphi_{вых}-\varphi_{вх}. \tag{5.1}$$

Модуль $K(\omega)$ называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ). Эта характеристика определяет зависимость коэффициента усиления цепи по напряжению от частоты.

Аргумент $\varphi(\omega)$ называют фазочастотной характеристикой (ФЧХ). Эта характеристика определяет зависимость от частоты величины фазового сдвига, который получает входной гармонический сигнал при прохождении через цепь.

Частотный коэффициент передачи определяют аналитически (методами контурных токов, узловых потенциалов, наложения и др.) или экспериментально. Для экспериментального определения частотной характеристики цепи на ее вход подают гармонический сигнал с постоянной амплитудой и, изменяя его частоту, фиксируют амплитуду и фазу гармонического сигнала на выходе цепи (линейная цепь не изменяет формы сигнала). В силу определенных частотных свойств цепи амплитуда и фаза выходного сигнала будут изменяться. Определяя отношение $U_{вых}/U_{вх}$ и разность $\varphi_{вых}-\varphi_{вх}$ для каждого значения частоты входного сигнала, можно получить зависимость коэффициента усиления по напряжению и фазового сдвига от частоты. Именно поэтому в вышеприведенных формулах эти параметры являются функциями частоты. Так как коэффициент усиления цепи в данном случае пропорционален амплитуде выходного напряжения, то его зависимость от частоты получила название амплитудно-частотной характеристики. Тем не менее, давать определение АЧХ как зависимости амплитуды от частоты будет не корректно (АЧХ – это характеристика цепи, и такого параметра как "амплитуда" у цепи нет).

Частотные характеристики описывают свойства цепи при воздействии гармонических сигналов. С их помощью можно определить реакцию цепи на заданное воздействие любой частоты и определить область частот, в пределах которой цепь выполняет свои функции полностью или частично.

В связи с этим используют понятие полосы пропускания цепи. Обычно это область частот, где АЧХ имеет значение не менее $1/\sqrt{2}\approx 0{,}707$ своего максимального значения. Значение, по которому определяют полосу пропускания линейной цепи, выбрано не случайно. Дело в том, что этот уровень определяет частотные границы, начиная с которых отношение выходной мощности к входной уменьшается более чем в 2 раза. Наиболее же удобен при практических расчетах нормированный модуль коэффициента передачи $K(\omega)/K_{\max}$, максимальная величина которого равна единице.

В зависимости от соотношения величины полосы пропускания цепи $\Delta\omega_{пр}$ и величины центральной частоты АЧХ ω_0 различают узкополосные цепи и широкополосные. Узкополосная цепь – это цепь, у которой $\Delta\omega_{пр} << \omega_0$. Широкополосная цепь не удовлетворяет этому условию. В дальнейшем будут рассмотрены примеры наиболее характерных и часто используемых узкополосных и широкополосных цепей.

Временные характеристики

Основными характеристиками линейных цепей во временной области являются импульсная и переходная характеристики. Эти характеристики позволяют определить выходной сигнал для любого входного воздействия, не обращаясь к спектральному представлению сигналов.

Импульсная характеристика цепи $h(t)$ – это реакция цепи на сигнал, описываемый дельта-функцией $\delta(t)$. Другими словами, выходной сигнал, формируемый линейной цепью при поступлении на ее вход сигнала в виде дельта-функции, является импульсной характеристикой. На практике сигнал в виде дельта-функции – это импульс прямоугольной формы, имеющий большую амплитуду (в пределах линейного участка характеристики цепи) и длительность, которая намного меньше постоянной времени цепи.

Переходная характеристика цепи $g(t)$ – это реакция цепи на сигнал, представляющий собой единичный скачок $\sigma(t)$. Таким образом, выходной сигнал, формируемый линейной цепью при поступлении на ее вход сигнала в виде резкого перепада, является переходной характеристикой.

Функциональная связь между временными характеристиками $h(t)$ и $g(t)$ обусловлена взаимной зависимостью дельта-функции и единичного скачка (производная и интеграл):

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad \text{и} \quad g(t) = \int_0^t h(t)dt .$$

Взаимная зависимость частотной и временных характеристик будет рассмотрена ниже.

Анализ линейных цепей с использованием частотных характеристик и анализ с использованием временных характеристик равносильны по результатам. Выбор одного из этих подходов диктуется простотой вычислений, исходными данными в части, касающейся сигналов и цепей, и характером необходимых результатов.

Рассмотрим некоторые линейные цепи и их характеристики.

На рис. 5.1,а представлена схема линейного четырехполюсника в виде последовательной RC -цепи с постоянной времени $\tau = RC$. На входе цепи действует напряжение $u_{вх}(t)$, а выходное напряжение $u_{вых}(t)$ может сниматься либо с сопротивления R, либо с конденсатора C. Определим зависимость выходного напряжения от входного для каждого из этих случаев. В соответствии со вторым законом Кирхгофа можно составить уравнение

$$u_{вх}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$, или $$Cu_{вх}(t) = \tau\, i(t) + \int i(t)dt$$.

Выполним анализ данного уравнения при большом и малом значениях τ .

1. Постоянная времени τ *– малая величина.*

Тогда $Cu_{вх}(t) \approx \int i(t)dt$ или $i(t) \approx C\dfrac{du_{вх}(t)}{dt}$.

В этом случае выходное напряжение, снимаемое с сопротивления R , будет равно $u_R(t) \approx \tau\dfrac{du_{вх}(t)}{dt}$. Следовательно, если выходное напряжение снимать с сопротивления, то при малых значениях постоянной времени τ последовательная RC -цепь может дифференцировать входной сигнал.

2. Постоянная времени τ *– большая величина.*

Тогда $Cu_{вх}(t) \approx \tau\, i(t)$ или $i(t) \approx \dfrac{Cu_{вх}(t)}{\tau} = \dfrac{1}{R}u_{вх}(t)$.

В этом случае выходное напряжение, снимаемое с конденсатора C , будет равно $u_C(t) \approx \dfrac{1}{C}\int i(t)dt = \dfrac{1}{\tau}\int u_{вх}(t)dt$. Следовательно, если выходное напряжение снимать с конденсатора, то при больших значениях постоянной времени τ последовательная RC -цепь может интегрировать входной сигнал.

Схема дифференцирующей цепи представлена на рис. 1,б, интегрирующей цепи – на рис. 1,в.

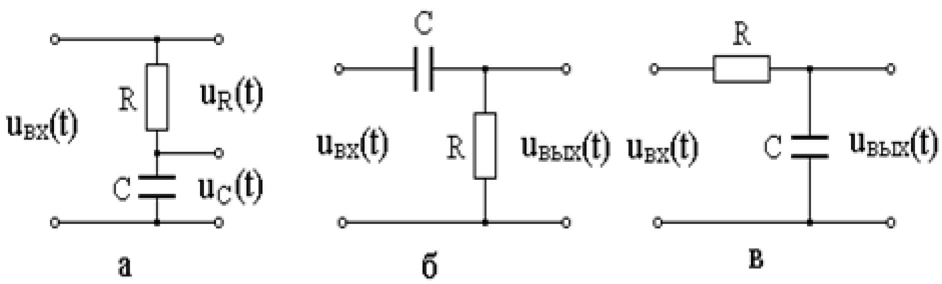


Рис. 1. Последовательная RC -цепь (а), дифференцирующая (б) и интегрирующая (в) цепи

Дифференцирующая цепь

Определим частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ дифференцирующей цепи. Комплексная амплитуда тока в цепи определяется законом Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{вх}}{R + 1/j\omega C}.$$

Следовательно, комплексная амплитуда выходного напряжения равна

$$\dot{U}_{вых} = \dot{I}R = \dot{U}_{вх}\frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

Отсюда:

частотный коэффициент передачи $K(j\omega) = \dfrac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}} = \dfrac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$; (5.2)

амплитудно-частотная характеристика $K(\omega) = \dfrac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$;

фазочастотная характеристика $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - arctg\omega\tau$.

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис.2,а.

Как следует из графика АЧХ, дифференцирующая цепь является фильтром верхних частот. Определим частоту среза ω_c на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$:

$$K(\omega_c) = \frac{\omega_c\tau}{\sqrt{1 + \omega_c^2\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \omega_c^2\tau^2 = 1;\ \omega_c = 1/\tau.$$

Для приближения к точному дифференцированию необходимо, чтобы на всех частотах спектра входного сигнала соблюдалось неравенство $\omega\tau << 1$. Тогда $K(j\omega) \approx j\omega\tau$ – частотная характеристика идеальной дифференцирующей цепи.

Интегрирующая цепь

Определим частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ интегрирующей цепи. Если комплексная амплитуда тока в цепи равна

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{вх}}{R + 1/j\omega C},$$

то комплексная амплитуда выходного напряжения равна

$$\dot{U}_{вых} = \dot{I}\frac{1}{j\omega C} = \dot{U}_{вх}\frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Отсюда:

частотный коэффициент передачи $K(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_{вых}}{\dot{U}_{вх}}=\dfrac{1}{1+j\omega\tau}$; (5.3)

амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$;

фазочастотная характеристика $\varphi(\omega)=-arctg\omega\tau$.

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 2,б.

Как следует из графика АЧХ, интегрирующая цепь является фильтром нижних частот. Частота среза также равна $1/\tau$.

Для приближения к точному интегрированию необходимо, чтобы на всех частотах спектра входного сигнала соблюдалось неравенство $\omega\tau<<1$. Тогда $K(j\omega)\approx 1/\omega\tau$ – частотная характеристика идеальной интегрирующей цепи.

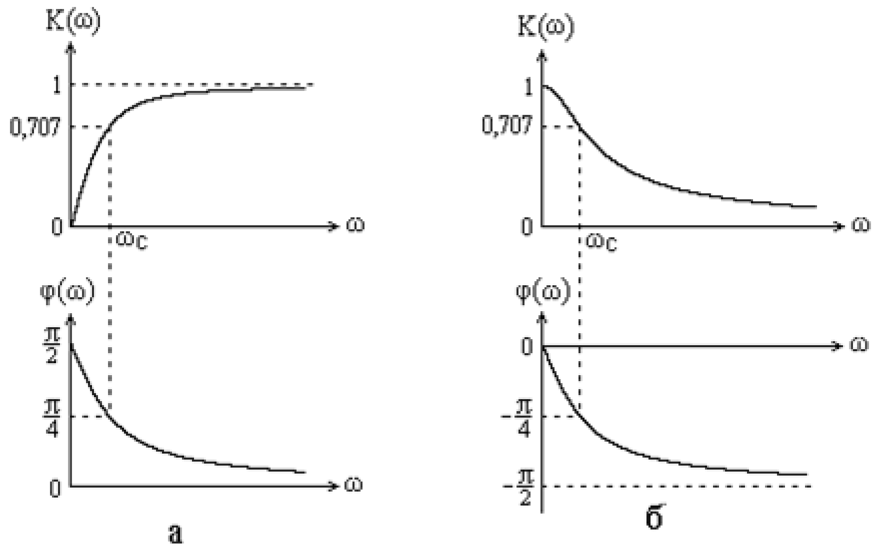


Рис. 2. АХЧ и ФХЧ цепи

В качестве фильтра нижних частот во многих радиотехнических устройствах (выпрямителях, детекторах и др.) применяется схема рис. 3,а.

Частотно-избирательные свойства этого фильтра характеризует комплексное входное сопротивление $Z(j\omega)$. Оно равно отношению комплексной амплитуды выходного напряжения к комплексной амплитуде тока в цепи и определяется следующим выражением:

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_{вых}}{\dot{I}} = \frac{R(1/j\omega C)}{R + 1/j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.4)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени фильтра.

Отсюда:

амплитудно-частотная характеристика $Z(\omega) = \dfrac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$;

фазочастотная характеристика $\varphi(\omega) = -arctg\omega\tau$.

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 3,б.

Как следует из графика АЧХ, рассматриваемый фильтр является фильтром нижних частот. Частота среза равна $1/\tau$.

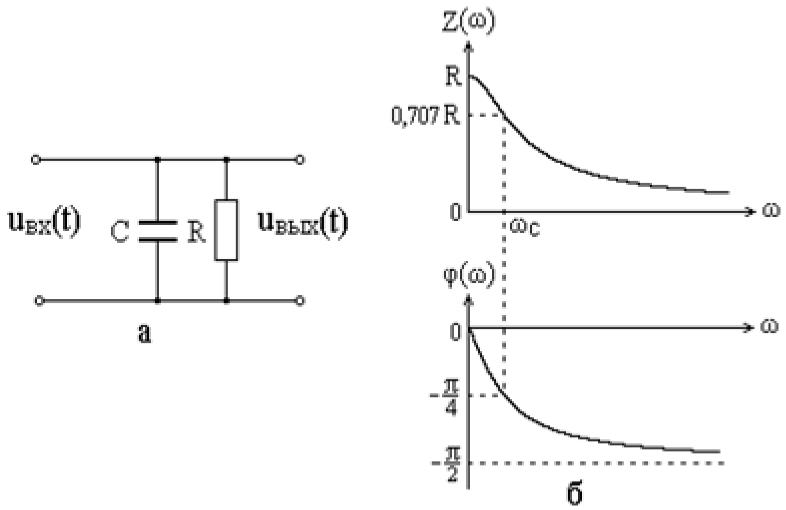


Рис. 3. Фильтр нижних частот (а), АЧХ и ФЧХ фильтра (б)